行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

利用多重型 II 設限樣本 burr type XII 分配的形狀參數做統計推論

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC93-2118-M-032-008-
執行期間：93 年 08 月 01 日至 94 年 07 月 31 日
執行單位：淡江大學統計學系

計畫主持人：吳忠武

計畫參與人員：林雅莉

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 94 年 9 月 29 日

行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

利用多重型 II 設限樣本對 burr type XII 分配的形狀參數做統計推論

計劃編號：NSC93-2118-M-032-008
執行期限：93 年 8 月 1 日至 94 年 7 月 31 日

主持人：吳忠武　研究生：林雅莉　執行機構及單位名稱：淡江大學統計學系

一、中文摘要

本文最主要的目的為利用具有單峰型或遞減故障率函數之 Burr type XII 分配的多重型 II 設限樣本建立 18 個樞紐量。再分別利用這 18 個樞紐量對形狀參數做假設檢定及建立形狀參數的信賴區間。然後，歸納出最適用的參數檢定及區間估計之方法。最後，我們給兩個例子和做一些蒙地卡羅模擬來評估這 18 個樞紐量在給定的顯著水準下，對形狀參數做假設檢定，那一個樞紐量提供的檢定統計量較為有效力；並且利用這些樞紐量在給定的信賴水準下，對形狀參數所建立的信賴區間，那一個信賴區間的平均區間長度較短。

Abstract

In this paper, we discuss the lifetime distribution with the unimodal shape or reversed bathtub shape failure rate function under the multiply type II censored sample. First, we provide 18 pivotal quantities to test the shape parameter of the lifetime distributions and establish confidence interval of the shape parameter under the multiply type II censored sample. Secondly, we also find the best test statistic based on their most power of test among all test statistics. In addition, we obtain the best pivotal quantities with the shortest tolerance length. Finally, we give two examples and the Monte Carlo simulation to assess the behavior (including higher power and more shorter length of confidence interval) of these pivotal quantities for testing null hypotheses under given significance level and establishing confidence interval of the shape parameter under the given confidence coefficient.

Keywords: Multiply type II censored sample; Shape parameter; bathtub-shape; Unimodal shape; Testing hypotheses; Burr type XII distribution; Confidence interval; Monte Carlo simulation.

二、緣由與目的

在現實生活中，我們常會遇到無法取得完整樣本的情況，例如因為時間、成本的限制或人為疏忽而不能獲得所有的觀察值，而在實際應用上，可靠度分析或存活分析的壽命資料就常有這種問題產生，面對此種不完整資料，我們無法利用一般應用於完整樣本的統計方法來做推論分析。因此，我們所要討論的即為多重型 II 設限樣本的統計分析方法。

許多產品的故障率函數會呈現浴缸型（bathtub shape）的曲線模式，例如電子、電鍍及機械等的產品。因此，我們在描述這種情況時，如果利用具有浴缸型故障率函數之雙參數分配會比 Weibull 分配，Extreme value 分配及 Normal 分配等等來得適合。然而，Jiang, Ji 和 Xiao (2003)曾經提到並非所有產品的故障率函數都呈現浴缸型的曲線模式，例如當產品因疲勞或劣化而故障時，其壽命模式會呈現單峰型(或稱反向的浴缸型)(unimodal 或 reversed bathtub shaped)的故障率曲線模式。因此，本文的主要研究目的為探討利用產品壽命來自 Burr type XII 分配之多重型 II 設限樣本對其形狀參數提出最適當的檢定及區間估計之方法。

(一) 具有單峰型故障率函數的壽命分配

若一隨機變數 Y 為具有參數 k 與形狀參數 c 的雙參數的 Burr type XII 分配，則其機率密度函數、累積分配函數及其所對應的故障率函數分別被給定如下：

$$f(y)=cky^{c-1}(1+y^{c})^{-(k+1)} \quad (y>0,\ c,k>0) \qquad (2\text{-}1)$$

$$F(y)=1-(1+y^{c})^{-k} \quad (y>0,\ c,k>0), \qquad (2\text{-}2)$$

與 $$h(y)=cky^{c-1}(1+y)^{-1} \quad (y>0,\ c,k>0) \qquad (2\text{-}3)$$

雖然，此分配具有參數 k 與形狀參數 c，但我們只針對形狀參數 c 做統計推論，其原因如下：

(1) Burr type XII 分配的形狀會受形狀參數 c 的影響，但不會受參數 k 影響。

(2) Burr type XII 分配所對應的故障率函數的形狀會受形狀參數 c 影響。當 $c\leq 1$ 時，$h(y)$ 是 y 的遞減函數；而當 $c>1$ 時，$h(y)$ 有一個單峰型。故本文只針對會影響故障率函數形狀之形狀參數 c 做統計推論。

假設隨機變數 Y 表示產品之壽命，並假設 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ 為一組來自具有參數 k 與形狀參數 c 的 Burr type XII 分配如式(2-2)之隨機變數，且將其排序後，得其對應的順序統計量(order statistics)記為 $Y_{(1)}<Y_{(2)}<\ldots<Y_{(n)}$。令隨機變數 $Z_i=k\ln(1+Y_i^c)$，i=1,…,n，則 Z_i 的累積分配函數為

$$G_{Z_i}(z)=P_r[Z_i\leq z]=P_r[k\ln(1+Y_i^c)\leq z]=P_r\{Y_i\leq[e^{\frac{z}{k}}-1]^{\frac{1}{c}}\}$$

$$=1-(1+e^{\frac{z}{k}}-1)^{-k}=1-e^{-z}\quad ,z>0 \qquad (2\text{-}4)$$

因此，我們可知 $Z_1,\ldots,Z_n$ 服從於標準指數分配，且將 $Z_1,\ldots,Z_n$ 排序後，得其對應的順序統計量記為 $Z_{(1)}<Z_{(2)}<\ldots<Z_{(n)}$。若將 $Z_i=k\ln(1+Y_i^c)$ 對 Y_i 微分可推得其結果必會大於零，可知 Z_i 為 Y_i 的嚴格遞增函數，因此可知若 $Y_{(1)}<Y_{(2)}<\ldots<Y_{(n)}$，則 $Z_{(1)}<Z_{(2)}<\ldots<Z_{(n)}$，其中 $Z_{(i)}=k\ln(1+Y_{(i)}^c)$，$i$=1,…,$n$。因為時間、成本的限制或人為疏忽而不能得到所有的觀測值，所以考慮資料型態為多重型 II 設限樣本 $Y_{(r+1)}<\ldots<Y_{(r+m)}<Y_{(r+m+l+1)}<\ldots<Y_{(n-s)}$。若將具 Burr type XII 分配之多重型 II 設限樣本 $Y_{(r+1)}<\ldots<Y_{(r+m)}<Y_{(r+m+l+1)}<\ldots<Y_{(n-s)}$，經過 $Z_i=k\ln(1+Y_i^c)$ 的隨機變數轉換，則可得到一組服從於標準指數分配的隨機樣本。首先，利用此組隨機樣本的順序統計量 $Z_{(r+1)}<\ldots<Z_{(r+m)}<Z_{(r+m+l+1)}<\ldots<Z_{(n-s)}$，其中 $Z_{(i)}=k\ln(1+Y_{(i)}^c)$，$i$=1,…,$n$，形成下列不同的十八個樞紐量，其中樞紐量 $\tilde{W}_1(c;n,r,m,l,s)$ ~$\tilde{W}_{12}(c;n,r,m,l,s)$ 是以算術平均數除以幾何平均數的概念形成，而樞紐量 $\tilde{W}_{13}(c;n,r,m,l,s)$ ~$\tilde{W}_{18}(c;n,r,m,l,s)$ 是以算術平均數的概念形成，且這些樞紐量的取法都是為了消除另一個參數 k 的影響，表示如下：

$$\tilde{W}_1(c;n,r,m,l,s)=\frac{\frac{1}{n-r-l-s}\left[\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]}{\left[\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]^{\frac{1}{n-r-l-s}}} \qquad (2\text{-}5)$$

$$\tilde{W}_2(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n}\left[r\ln(1+Y_{(r+1)}^c)+\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+l\ln(1+Y_{(r+m)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)+s\ln(1+Y_{(n-s)}^c)\right]}{\left[(\ln(1+Y_{(r+1)}^c))^r\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(r+m)}^c))^l\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(n-s)}^c))^s\right]^{\frac{1}{n}}} \qquad (2\text{-}6)$$

$$\tilde{W}_3(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n}\left[r\ln(1+Y_{(r+1)}^c)+\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+l\ln(1+Y_{(r+m+l+1)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)+s\ln(1+Y_{(n-s)}^c)\right]}{\left[(\ln(1+Y_{(r+1)}^c))^r\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(r+m+l+1)}^c))^l\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(n-s)}^c))^s\right]^{\frac{1}{n}}} \qquad (2\text{-}7)$$

$$\tilde{W}_4(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n-r}\left[\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+l\ln(1+Y_{(r+m)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)+s\ln(1+Y_{(n-s)}^c)\right]}{\left[\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(r+m)}^c))^l\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(n-s)}^c))^s\right]^{\frac{1}{n-r}}} \qquad (2\text{-}8)$$

$$\tilde{W}_5(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n-r}\left[\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+l\ln(1+Y_{(r+m+l+1)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)+s\ln(1+Y_{(n-s)}^c)\right]}{\left[\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(r+m+l+1)}^c))^l\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(n-s)}^c))^s\right]^{\frac{1}{n-r}}} \qquad (2\text{-}9)$$

$$\tilde{W}_6(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n-s}\left[r\ln(1+Y_{(r+1)}^c)+\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+l\ln(1+Y_{(r+m)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]}{\left[(\ln(1+Y_{(r+1)}^c))^r\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(r+m)}^c))^l\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]^{\frac{1}{n-s}}} \qquad (2\text{-}10)$$

$$\tilde{W}_7(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n-s}\left[r\ln(1+Y_{(r+1)}^c)+\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+l\ln(1+Y_{(r+m+l+1)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]}{\left[(\ln(1+Y_{(r+1)}^c))^r\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(r+m+l+1)}^c))^l\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]^{\frac{1}{n-s}}} \qquad (2\text{-}11)$$

$$\tilde{W}_8(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n-r-s}\left[\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+l\ln(1+Y_{(r+m)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]}{\left[\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(r+m)}^c))^l\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]^{\frac{1}{n-r-s}}} \qquad (2\text{-}12)$$

$$\tilde{W}_9(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n-r-s}\left[\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+l\ln(1+Y_{(r+m+l+1)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]}{\left[\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(r+m+l+1)}^c))^l\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]^{\frac{1}{n-r-s}}} \qquad (2\text{-}13)$$

$$\tilde{W}_{10}(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n-l}\left[r\ln(1+Y_{(r+1)}^c)+\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)+s\ln(1+Y_{(n-s)}^c)\right]}{\left[(\ln(1+Y_{(r+1)}^c))^r\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(n-s)}^c))^s\right]^{\frac{1}{n-l}}} \qquad (2\text{-}14)$$

$$\tilde{W}_{11}(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n-r-l}\left[\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)+s\ln(1+Y_{(n-s)}^c)\right]}{\left[\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)(\ln(1+Y_{(n-s)}^c))^s\right]^{\frac{1}{n-r-l}}} \qquad (2\text{-}15)$$

$$\tilde{W}_{12}(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{\frac{1}{n-l-s}\left[r\ln(1+Y_{(r+1)}^c)+\sum_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]}{\left[(\ln(1+Y_{(r+1)}^c))^r\prod_{i=r+1}^{r+m}\ln(1+Y_{(i)}^c)\prod_{i=r+m+l+1}^{n-s}\ln(1+Y_{(i)}^c)\right]^{\frac{1}{n-l-s}}} \qquad (2\text{-}16)$$

$$\tilde{W}_{13}(c;n,r,m,l,s)=$$

$$\frac{1}{n-r-l-s-1}\left[\sum_{i=r+2}^{r+m}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}\right] \qquad (2\text{-}17)$$

$$\tilde{W}_{14}(c;n,r,m,l,s)=\frac{1}{n-r-1}$$

$$\left[\sum_{i=r+2}^{r+m}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+l\frac{\ln(1+Y_{(r+m)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+s\frac{\ln(1+Y_{(n-s)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}\right] \qquad (2\text{-}18)$$

$$\tilde{W}_{15}(c;n,r,m,l,s)=\frac{1}{n-r-1}$$

$$\left[\sum_{i=r+2}^{r+m}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+l\frac{\ln(1+Y_{(r+m+l+1)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+s\frac{\ln(1+Y_{(n-s)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}\right] \qquad (2\text{-}19)$$

$$\tilde{W}_{16}(c;n,r,m,l,s)=\frac{1}{n-r-s-1}\left[\sum_{i=r+2}^{r+m}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+l\frac{\ln(1+Y_{(r+m)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}\right] \quad (2\text{-}20)$$

$$\tilde{W}_{17}(c;n,r,m,l,s)=\frac{1}{n-r-s-1}\left[\sum_{i=r+2}^{r+m}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+l\frac{\ln(1+Y_{(r+m+l+1)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}\right] \quad (2\text{-}21)$$

$$\tilde{W}_{18}(c;n,r,m,l,s)=\frac{1}{n-r-l-1}\left[\sum_{i=r+2}^{r+m}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+\sum_{i=r+m+l+1}^{n-s}\frac{\ln(1+Y_{(i)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}+s\frac{\ln(1+Y_{(n-s)}^c)}{\ln(1+Y_{(r+1)}^c)}\right] \quad (2\text{-}22)$$

我們可以很容易地證明此十八個樞紐量的分配皆與參數 k 和形狀參數 c 無關；因此，它們對 c 皆能提供一個檢定統計量。在此，我們以 $\tilde{W}_\alpha^i(n,r,m,l,s)$ 表示 $\tilde{W}_i(c;n,r,m,l,s)$ 的分配之上 α 臨界值(upper α critical value)，i=1,…,n。則對任意 0<α<1

$$P_r[\tilde{W}_{1-\alpha/2}^i(n,r,m,l,s)<\tilde{W}_i(c;n,r,m,l,s)<\tilde{W}_{\alpha/2}^i(n,r,m,l,s)]=1-\alpha$$

因為這些樞紐量的分配計算較複雜且不易求得，所以 $\tilde{W}_i(c;n,r,m,l,s)$ 的上百分位數和下百分位數將藉由蒙地卡羅模擬求得，並且採用 Compaq Visual Fortran V6.0 及 IMSL(2000)的模擬工具，同的樣本數 n=12,24,36 及不同的 r、m、l、s 之組合下，即可獲得這十八個樞紐量的分配之臨界值附表（**詳細內容參見林雅莉之碩士論文**）。

假設 $Y_{(r+1)}<\ldots<Y_{(r+m)}<Y_{(r+m+l+1)}<\ldots<Y_{(n-s)}$ 為來自 Burr type XII 分配之多重型 II 設限樣本，則對假設檢定 $H_0: c=c_0$ v.s. $H_1: c\neq c_0$ 的決策原則為

假若 $\tilde{W}_i(c_0;n,r,m,l,s)>\tilde{W}_{\alpha/2}^i(n,r,m,l,s)$ 或 $\tilde{W}_i(c_0;n,r,m,l,s)<\tilde{W}_{1-\alpha/2}^i(n,r,m,l,s)$，則棄卻虛無假設 $H_0: c=c_0$。

進一步，我們可證明對方程式 $\tilde{W}_i(c;n,r,m,l,s)=t$，$i$=1,...,18，在 c>0 時，它們皆存在一個 c 的唯一解。因此，利用之前所定義的多重型 II 設限樣本及所有的樞紐量，則我們可以建立形狀參數 c 的 100(1−α)% 信賴區間為 (C_l^i, C_u^i)，其中 C_l^i 和 C_u^i 分別是方程式

$$\tilde{W}_i(c;n,r,m,l,s)=\tilde{W}_{1-\alpha/2}^i(n,r,m,l,s) \quad \text{和}$$

$$\tilde{W}_i(c;n,r,m,l,s)=\tilde{W}_{\alpha/2}^i(n,r,m,l,s)$$

中 c 的唯一解。

我們可將模擬分成兩個部分，第一部分為利用(2-5)至(2-22)式所提到的樞紐量來檢定 $H_0: c=c_0$ v.s. $H_1: c\neq c_0$，並且利用蒙地卡羅模擬的方式來比較各樞紐量的檢定力。假定 c_0=1.4 (單峰型故障率函數) 及 c_0=0.8 (遞減的故障率函數)，而在給定顯著水準 $\alpha=0.1$、形狀參數 c=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 4.0, 6.0 及參數 k= 1 之下，在樣本數 n=12,24,36 及左設限個數 r 及之後觀察到的 m 個觀測值、中間設限 l、右設限 s 的值之組合下，即可獲得各個樞紐量的檢定力比較表，例如：當 c=0.8,1.4、n=12 且多重(r,m,l,s)=(3,5,2,1)設限時，檢定力表現較佳樞紐量為 $\tilde{W}_6$、$\tilde{W}_{12}$、$\tilde{W}_{17}$ 及 $\tilde{W}_{18}$（**詳細內容參見林雅莉之碩士論文**）。

接著，我們也同樣用模擬的方法且假定 c 的真值分別為 1.4 (單峰型故障率函數) 及 0.8(遞減的故障率函數)且給定參數 k=1，樣本數 n=12,24,36 及左設限個數 r 及之後觀察到的 m 個觀測值、中間設限 l、右設限 s 的值之組合下，來求得各個樞紐量在信賴係數 1-α=0.90 之下所建立出形狀參數 c 的 90% 信賴區間及平均區間長度比較表，例如：當 c=0.8,1.4、n=12 且多重(r,m,l,s)=(3,5,2,1)設限時，平均區間長度最短的樞紐量為 $\tilde{W}_{16}$（**詳細內容參見林雅莉之碩士論文**）。

最後，我們將舉出兩個數值實例來說明形狀參數 c 之假設檢定及區間估計如何應用。

例子一：

由電腦模擬出樣本數為 12 且具有參數 k=1，形狀參數 c=0.8 的 Burr type XII 分配之隨機樣本。模擬出的觀察值如下：

0.001378	0.010638	0.132804	48.614530
0.702247	0.175822	4.439592	111.693800
0.270242	0.324857	6.143704	2.854974

將其排序，而得到以下資料：

0.001378	0.010638	0.132804	0.175822
0.270242	0.324857	0.702247	2.854974
4.439592	6.143704	48.614530	111.693800

因此在顯著水準 $\alpha=0.1$ 之下檢定 $H_0: c=0.8$ v.s. $H_1: c\neq 0.8$，將假設僅觀察到多重(r,m,l,s)設限的觀察值及令 c=0.8 下代入(2-5)式至(2-22)式中，以下僅列出多重(r,m,l,s)=(3,5,2,1)設限下十八個樞紐量的計算過程，而其他設限結果列於表 1 到表 8。

$\tilde{W}_1(0.8;12,3,5,2,1)=1.594415$、$\tilde{W}_2(0.8;12,3,5,2,1)=1.651426$；
$\tilde{W}_3(0.8;12,3,5,2,1)=1.863499$、$\tilde{W}_4(0.8;12,3,5,2,1)=1.489318$；
$\tilde{W}_5(0.8;12,3,5,2,1)=1.615738$、$\tilde{W}_6(0.8;12,3,5,2,1)=1.543071$；
$\tilde{W}_7(0.8;12,3,5,2,1)=1.866189$、$\tilde{W}_8(0.8;12,3,5,2,1)=1.425527$；
$\tilde{W}_9(0.8;12,3,5,2,1)=1.654415$、$\tilde{W}_{10}(0.8;12,3,5,2,1)=1.817816$；
$\tilde{W}_{11}(0.8;12,3,5,2,1)=1.668124$、$\tilde{W}_{12}(0.8;12,3,5,2,1)=1.654281$；
$\tilde{W}_{13}(0.8;12,3,5,2,1)=4.996576$、$\tilde{W}_{14}(0.8;12,3,5,2,1)=6.242585$；
$\tilde{W}_{15}(0.8;12,3,5,2,1)=8.438644$、$\tilde{W}_{16}(0.8;12,3,5,2,1)=5.109322$；
$\tilde{W}_{17}(0.8;12,3,5,2,1)=7.619104$、$\tilde{W}_{18}(0.8;12,3,5,2,1)=6.526384$；

再分別查出各個樞紐量臨界值的下界與上界，分別如下（**查表值參見林雅莉之碩士論文**）

$\tilde{W}_{0.95}^{1}(12,3,5,2,1)$ =1.0523、$\tilde{W}_{0.05}^{1}(12,3,5,2,1)$ =1.5523；
$\tilde{W}_{0.95}^{2}(12,3,5,2,1)$ =1.0634、$\tilde{W}_{0.05}^{2}(12,3,5,2,1)$ =1.6707；
$\tilde{W}_{0.95}^{3}(12,3,5,2,1)$ =1.0860、$\tilde{W}_{0.05}^{3}(12,3,5,2,1)$ =1.8632；
$\tilde{W}_{0.95}^{4}(12,3,5,2,1)$ =1.0490、$\tilde{W}_{0.05}^{4}(12,3,5,2,1)$ =1.4785；
$\tilde{W}_{0.95}^{5}(12,3,5,2,1)$ =1.0635、$\tilde{W}_{0.05}^{5}(12,3,5,2,1)$ =1.5790；
$\tilde{W}_{0.95}^{6}(12,3,5,2,1)$ =1.0496、$\tilde{W}_{0.05}^{6}(12,3,5,2,1)$ =1.5700；
$\tilde{W}_{0.95}^{7}(12,3,5,2,1)$ =1.0822、$\tilde{W}_{0.05}^{7}(12,3,5,2,1)$ =1.8707；
$\tilde{W}_{0.95}^{8}(12,3,5,2,1)$ =1.0406、$\tilde{W}_{0.05}^{8}(12,3,5,2,1)$ =1.4023；
$\tilde{W}_{0.95}^{9}(12,3,5,2,1)$ =1.0644、$\tilde{W}_{0.05}^{9}(12,3,5,2,1)$ =1.6130；
$\tilde{W}_{0.95}^{10}(12,3,5,2,1)$ =1.0737、$\tilde{W}_{0.05}^{10}(12,3,5,2,1)$ =1.8320；
$\tilde{W}_{0.95}^{11}(12,3,5,2,1)$ =1.0622、$\tilde{W}_{0.05}^{11}(12,3,5,2,1)$ =1.6227；
$\tilde{W}_{0.95}^{12}(12,3,5,2,1)$ =1.0562、$\tilde{W}_{0.05}^{12}(12,3,5,2,1)$ =1.6922；
$\tilde{W}_{0.95}^{13}(12,3,5,2,1)$ =1.5997、$\tilde{W}_{0.05}^{13}(12,3,5,2,1)$ =6.3965；
$\tilde{W}_{0.95}^{14}(12,3,5,2,1)$ =1.7308、$\tilde{W}_{0.05}^{14}(12,3,5,2,1)$ =7.5285；
$\tilde{W}_{0.95}^{15}(12,3,5,2,1)$ =1.9819、$\tilde{W}_{0.05}^{15}(12,3,5,2,1)$ =9.8429；
$\tilde{W}_{0.95}^{16}(12,3,5,2,1)$ =1.5867、$\tilde{W}_{0.05}^{16}(12,3,5,2,1)$ =6.4289；
$\tilde{W}_{0.95}^{17}(12,3,5,2,1)$ =1.8950、$\tilde{W}_{0.05}^{17}(12,3,5,2,1)$ =9.0100；
$\tilde{W}_{0.95}^{18}(12,3,5,2,1)$ =1.7761、$\tilde{W}_{0.05}^{18}(12,3,5,2,1)$ =7.9072；

由此可知，樞紐量$\tilde{W}_1$、$\tilde{W}_3$、$\tilde{W}_4$、$\tilde{W}_5$、$\tilde{W}_8$、$\tilde{W}_9$及$\tilde{W}_{11}$落於拒絕域內，其餘的樞紐量皆落於接受域內。另外，由檢定力模擬結果中我們也可以發現，實際上這些樞紐量的檢定力大小表現的都是比較低的。

表 1 (Burr typeXII 分配)在數值實例中，當(n,r,m,l,s)= (12,2,5,3,1)且α =0.1 之臨界值上下界及各樞紐量的觀察值

樞紐量	$\tilde{W}_{0.95}^{i}(12,2,5,3,1)$	$\tilde{W}_{0.05}^{i}(12,2,5,3,1)$	$\tilde{W}_{i}(0.8;12,2,5,3,1)$
$\tilde{W}_1$	1.0864	1.8434	1.799493
$\tilde{W}_2$	1.0918	1.8553	1.743931
$\tilde{W}_3$	1.1355	2.1278	2.017165
$\tilde{W}_4$	1.0733	1.6456	1.662740
$\tilde{W}_5$	1.1021	1.7767	1.793609
$\tilde{W}_6$	1.0714	1.7167	1.544296
$\tilde{W}_7$	1.1360	2.1959	2.066049
$\tilde{W}_8$	1.0586	1.5239	1.498318
$\tilde{W}_9$	1.1060	1.8442	1.859793
$\tilde{W}_{10}$	1.1213	2.2328	2.041616
$\tilde{W}_{11}$	1.1040	1.9384	1.935705
$\tilde{W}_{12}$	1.0937	2.0582	1.813481
$\tilde{W}_{13}$	1.8079	9.9345	5.047002
$\tilde{W}_{14}$	1.9515	11.5060	5.766419
$\tilde{W}_{15}$	2.4980	17.7249	10.524736
$\tilde{W}_{16}$	1.7486	9.5983	4.315733
$\tilde{W}_{17}$	2.3946	16.4915	9.668840
$\tilde{W}_{18}$	2.0769	12.8211	7.101152

表 2 (Burr typeXII 分配)在數值實例中，當(n,r,m,l,s)= (12,1,5,3,2)且α =0.1 之臨界值上下界及各樞紐量的觀察值

樞紐量	$\tilde{W}_{0.95}^{i}(12,1,5,3,2)$	$\tilde{W}_{0.05}^{i}(12,1,5,3,2)$	$\tilde{W}_{i}(0.8;12,1,5,3,2)$
$\tilde{W}_1$	1.1004	2.0705	1.919218
$\tilde{W}_2$	1.1077	1.9816	1.980620
$\tilde{W}_3$	1.1350	2.0915	2.076474
$\tilde{W}_4$	1.0898	1.7826	1.724352
$\tilde{W}_5$	1.1091	1.8243	1.746200
$\tilde{W}_6$	1.0796	1.8418	1.782874
$\tilde{W}_7$	1.1432	2.2922	2.270031
$\tilde{W}_8$	1.0681	1.6461	1.558286
$\tilde{W}_9$	1.1194	1.9908	1.888746
$\tilde{W}_{10}$	1.1431	2.3906	2.362083
$\tilde{W}_{11}$	1.1220	2.0791	1.960932
$\tilde{W}_{12}$	1.1099	2.3417	2.277245
$\tilde{W}_{13}$	1.9541	18.2184	20.794617
$\tilde{W}_{14}$	2.2935	24.0289	27.092783
$\tilde{W}_{15}$	2.8255	33.6316	42.309643
$\tilde{W}_{16}$	1.9002	17.9115	17.909811
$\tilde{W}_{17}$	2.6156	29.7535	36.930885
$\tilde{W}_{18}$	2.4637	26.9893	33.088916

表 3 (Burr typeXII 分配)在數值實例中，當(n,r,m,l,s)= (12,4,5,1,1)且α =0.1 之臨界值上下界及各樞紐量的觀察值

樞紐量	$\tilde{W}^i_{0.95}(12,4,5,1,1)$	$\tilde{W}^i_{0.05}(12,4,5,1,1)$	$\tilde{W}_i(0.8;12,4,5,1,1)$
$\tilde{W}_1$	1.0315	1.3789	1.414675
$\tilde{W}_2$	1.0419	1.5312	1.545289
$\tilde{W}_3$	1.0493	1.6154	1.640507
$\tilde{W}_4$	1.0323	1.3686	1.385519
$\tilde{W}_5$	1.0373	1.4198	1.441606
$\tilde{W}_6$	1.0332	1.4556	1.459495
$\tilde{W}_7$	1.0439	1.5769	1.598947
$\tilde{W}_8$	1.0280	1.3262	1.350527
$\tilde{W}_9$	1.0364	1.4234	1.451585
$\tilde{W}_{10}$	1.0439	1.5769	1.598947
$\tilde{W}_{11}$	1.0364	1.4234	1.451585
$\tilde{W}_{12}$	1.0337	1.4783	1.489458
$\tilde{W}_{13}$	1.4640	4.8288	4.459762
$\tilde{W}_{14}$	1.5719	5.6578	5.373436
$\tilde{W}_{15}$	1.6544	6.3481	6.177405
$\tilde{W}_{16}$	1.4707	4.9343	4.523756
$\tilde{W}_{17}$	1.5783	5.7040	5.461720
$\tilde{W}_{18}$	1.5783	5.7040	5.461720

表 4 (Burr typeXII 分配)在數值實例中，當(n,r,m,l,s)= (12,1,5,1,4)且α =0.1 之臨界值上下界及各樞紐量的觀察值

樞紐量	$\tilde{W}^i_{0.95}(12,1,5,1,4)$	$\tilde{W}^i_{0.05}(12,1,5,1,4)$	$\tilde{W}_i(0.8;12,1,5,1,4)$
$\tilde{W}_1$	1.0481	1.7061	1.682744
$\tilde{W}_2$	1.0589	1.7022	1.822386
$\tilde{W}_3$	1.0617	1.7186	1.830591
$\tilde{W}_4$	1.0462	1.5139	1.568563
$\tilde{W}_5$	1.0481	1.5206	1.561273
$\tilde{W}_6$	1.0505	1.8172	1.822104
$\tilde{W}_7$	1.0635	1.9509	2.063415
$\tilde{W}_8$	1.0429	1.5999	1.563168
$\tilde{W}_9$	1.0538	1.7102	1.735162
$\tilde{W}_{10}$	1.0639	1.7774	1.897506
$\tilde{W}_{11}$	1.0505	1.5661	1.608616
$\tilde{W}_{12}$	1.0547	1.9387	1.984974
$\tilde{W}_{13}$	1.6722	14.4665	17.230104
$\tilde{W}_{14}$	2.0261	20.8174	28.326077
$\tilde{W}_{15}$	2.0902	22.0564	31.616106
$\tilde{W}_{16}$	1.6893	14.9735	16.542053
$\tilde{W}_{17}$	1.8197	16.9695	22.025438
$\tilde{W}_{18}$	2.0467	21.2043	30.017662

表 5 (Burr typeXII 分配)在數值實例中，當(n,r,m,l,s)= (12,0,0,0,6)且α =0.1 之臨界值上下界及各樞紐量的觀察值

樞紐量	$\tilde{W}^i_{0.95}(12,0,0,0,6)$	$\tilde{W}^i_{0.05}(12,0,0,0,6)$	$\tilde{W}_i(0.8;12,0,0,0,6)$
$\tilde{W}_1$	1.0584	2.2624	1.981059
$\tilde{W}_2$	1.0474	1.6546	1.480767
$\tilde{W}_3$	1.0474	1.6546	1.480767
$\tilde{W}_4$	1.0474	1.6546	1.480767
$\tilde{W}_5$	1.0474	1.6546	1.480767
$\tilde{W}_6$	1.0584	2.2624	1.981059
$\tilde{W}_7$	1.0584	2.2624	1.981059
$\tilde{W}_8$	1.0584	2.2624	1.981059
$\tilde{W}_9$	1.0584	2.2624	1.981059
$\tilde{W}_{10}$	1.0474	1.6546	1.480767
$\tilde{W}_{11}$	1.0474	1.6546	1.480767
$\tilde{W}_{12}$	1.0584	2.2624	1.981059
$\tilde{W}_{13}$	2.0977	74.7749	41.976986
$\tilde{W}_{14}$	2.4205	106.9466	55.358463
$\tilde{W}_{15}$	2.4205	106.9466	55.358463
$\tilde{W}_{16}$	2.0977	74.7749	41.976986
$\tilde{W}_{17}$	2.0977	74.7749	41.976986
$\tilde{W}_{18}$	2.4205	106.9466	55.358463

表 6 (Burr typeXII 分配)在數值實例中，當(n,r,m,l,s)= (12,6,3,0,0)且α =0.1 之臨界值上下界及各樞紐量的觀察值

樞紐量	$\tilde{W}^i_{0.95}(12,6,3,0,0)$	$\tilde{W}^i_{0.05}(12,6,3,0,0)$	$\tilde{W}_i(0.8;12,6,3,0,0)$
$\tilde{W}_1$	1.0243	1.3460	1.201353
$\tilde{W}_2$	1.0252	1.4014	1.319147
$\tilde{W}_3$	1.0252	1.4014	1.319147
$\tilde{W}_4$	1.0243	1.3460	1.201353
$\tilde{W}_5$	1.0243	1.3460	1.201353
$\tilde{W}_6$	1.0252	1.4014	1.319147
$\tilde{W}_7$	1.0252	1.4014	1.319147
$\tilde{W}_8$	1.0243	1.3460	1.201353
$\tilde{W}_9$	1.0243	1.3460	1.201353
$\tilde{W}_{10}$	1.0252	1.4014	1.319147
$\tilde{W}_{11}$	1.0243	1.3460	1.201353
$\tilde{W}_{12}$	1.0252	1.4014	1.319147
$\tilde{W}_{13}$	1.4236	4.2156	4.010777
$\tilde{W}_{14}$	1.4236	4.2156	4.010777
$\tilde{W}_{15}$	1.4236	4.2156	4.010777
$\tilde{W}_{16}$	1.4236	4.2156	4.010777
$\tilde{W}_{17}$	1.4236	4.2156	4.010777
$\tilde{W}_{18}$	1.4236	4.2156	4.010777

表 7 (Burr typeXII 分配)在數值實例中，當(n,r,m,l,s)= (12,3,3,0,3)且α =0.1 之臨界值上下界及各樞紐量的觀察值

樞紐量	$\tilde{W}^i_{0.95}(12,3,3,0,3)$	$\tilde{W}^i_{0.05}(12,3,3,0,3)$	$\tilde{W}_i(0.8;12,3,3,0,3)$
$\tilde{W}_1$	1.0188	1.3098	1.281438
$\tilde{W}_2$	1.0290	1.4748	1.382730
$\tilde{W}_3$	1.0290	1.4748	1.382730
$\tilde{W}_4$	1.0196	1.2843	1.263645
$\tilde{W}_5$	1.0196	1.2843	1.263645
$\tilde{W}_6$	1.0222	1.4473	1.328505
$\tilde{W}_7$	1.0222	1.4473	1.328505
$\tilde{W}_8$	1.0188	1.3098	1.281438
$\tilde{W}_9$	1.0188	1.3098	1.281438
$\tilde{W}_{10}$	1.0290	1.4748	1.382730
$\tilde{W}_{11}$	1.0196	1.2843	1.263645
$\tilde{W}_{12}$	1.0222	1.4473	1.328505
$\tilde{W}_{13}$	1.3863	5.1289	3.472895
$\tilde{W}_{14}$	1.5275	6.4507	4.629440
$\tilde{W}_{15}$	1.5275	6.4507	4.629440
$\tilde{W}_{16}$	1.3863	5.1289	3.472895
$\tilde{W}_{17}$	1.3863	5.1289	3.472895
$\tilde{W}_{18}$	1.5275	6.4507	4.629440

表 8 (Burr typeXII 分配)在數值實例中，當(n,r,m,l,s)= (12,0,3,6,0)且α =0.1 之臨界值上下界及各樞紐量的觀察值

樞紐量	$\tilde{W}^i_{0.95}(12,0,3,6,0)$	$\tilde{W}^i_{0.05}(12,0,3,6,0)$	$\tilde{W}_i(0.8;12,0,3,6,0)$
$\tilde{W}_1$	1.4679	4.7239	5.250498
$\tilde{W}_2$	1.3331	4.2909	3.664311
$\tilde{W}_3$	1.2263	2.2091	2.295729
$\tilde{W}_4$	1.3331	4.2909	3.664311
$\tilde{W}_5$	1.2263	2.2091	2.295729
$\tilde{W}_6$	1.3331	4.2909	3.664311
$\tilde{W}_7$	1.2263	2.2091	2.295729
$\tilde{W}_8$	1.3331	4.2909	3.664311
$\tilde{W}_9$	1.2263	2.2091	2.295729
$\tilde{W}_{10}$	1.4679	4.7239	5.250498
$\tilde{W}_{11}$	1.4679	4.7239	5.250498
$\tilde{W}_{12}$	1.4679	4.7239	5.250498
$\tilde{W}_{13}$	5.6752	320.6492	343.609467
$\tilde{W}_{14}$	3.4881	170.6082	175.465561
$\tilde{W}_{15}$	5.9547	339.7948	332.912415
$\tilde{W}_{16}$	3.4881	170.6082	175.465561
$\tilde{W}_{17}$	5.9547	339.7948	332.912415
$\tilde{W}_{18}$	5.6752	320.6492	343.609467

從表 1 到表 8 可知，落於拒絕域內的樞紐量，其由節的檢定力模擬結果中我們可以發現，實際上這些樞紐量的檢定力大小大部份表現的都是比較低的。

<u>例子二：</u>

由電腦模擬出樣本數為 24 且具有參數 k=1，形狀參數 c=1.4 的 Burr type XII 分配之隨機樣本。模擬出的觀察值如下：

0.093979	2.559909	0.913415	0.909750
5.712208	0.203825	1.574450	0.392095
0.297027	0.344017	0.696076	3.536506
1.038123	1.121106	1.070715	0.242856
1.003088	1.481226	22.051211	1.985932
0.490356	2.581164	2.764670	0.091158

將其排序，而得到以下資料：

0.091158	0.093979	0.203825	0.242856
0.297027	0.344017	0.392095	0.490356
0.696076	0.909750	0.913415	1.003088
1.038123	1.070715	1.121106	1.481226
1.574450	1.985932	2.559909	2.581164
2.764670	3.536506	5.712208	22.051211

再分別查出各個樞紐量臨界值的下界與上界，分別如下（**查表值參見林雅莉之碩士論文**）

$\tilde{W}^1_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.1692$、$\tilde{W}^1_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.6319$；
$\tilde{W}^2_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.2389$、$\tilde{W}^2_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.9624$；
$\tilde{W}^3_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.2282$、$\tilde{W}^3_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.9017$；
$\tilde{W}^4_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.1843$、$\tilde{W}^4_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.7094$；
$\tilde{W}^5_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.1711$、$\tilde{W}^5_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.6452$；
$\tilde{W}^6_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.2197$、$\tilde{W}^6_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.9088$；
$\tilde{W}^7_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.2101$、$\tilde{W}^7_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.8505$；
$\tilde{W}^8_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.1699$、$\tilde{W}^8_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.6637$；
$\tilde{W}^9_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.1577$、$\tilde{W}^9_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.6000$；
$\tilde{W}^{10}_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.2452$、$\tilde{W}^{10}_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.9699$；
$\tilde{W}^{11}_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.1815$、$\tilde{W}^{11}_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.6696$；
$\tilde{W}^{12}_{0.95}(24,3,5,2,1)=1.2275$、$\tilde{W}^{12}_{0.05}(24,3,5,2,1)=1.9259$；
$\tilde{W}^{13}_{0.95}(24,3,5,2,1)=3.3685$、$\tilde{W}^{13}_{0.05}(24,3,5,2,1)=16.8996$；
$\tilde{W}^{14}_{0.95}(24,3,5,2,1)=3.4033$、$\tilde{W}^{14}_{0.05}(24,3,5,2,1)=17.1040$；
$\tilde{W}^{15}_{0.95}(24,3,5,2,1)=3.4544$、$\tilde{W}^{15}_{0.05}(24,3,5,2,1)=17.4479$；
$\tilde{W}^{16}_{0.95}(24,3,5,2,1)=3.1769$、$\tilde{W}^{16}_{0.05}(24,3,5,2,1)=15.6193$；
$\tilde{W}^{17}_{0.95}(24,3,5,2,1)=3.2298$、$\tilde{W}^{17}_{0.05}(24,3,5,2,1)=15.9848$；
$\tilde{W}^{18}_{0.95}(24,3,5,2,1)=3.6083$、$\tilde{W}^{18}_{0.05}(24,3,5,2,1)=18.4812$；

將以上所獲得的樣本及各樞紐量臨界值的上界與下界代入以下方程式，即可求解出在不同樞紐量所建立出的形狀參數 c 之 90% 信賴區間為 (C^i_l, C^i_u)，其中 C^i_l 和 C^i_u 分別是方程式

$\tilde{W}_i(1.4;24,3,5,2,1)=\tilde{W}^i_{0.95}(24,3,5,2,1)$ 和

$\tilde{W}_i(1.4;24,3,5,2,1)=\tilde{W}^i_{0.05}(24,3,5,2,1)$

中 c 的唯一解。

最後，將解出多重(r,m,l,s)=(3,5,2,1)設限下的形狀參數 c 之 90% 的信賴區間之上界及下界並求出信賴區間的區間長度列於表 9，其他設限結果列於表 10 到表 17。

由表 9 可看出這些信賴區間皆包含 c 的真實值 1.4，且發現樞紐量 $\tilde{W}_6$ 的區間長度是最短的，其次為樞紐量 $\tilde{W}_2$ 及 $\tilde{W}_{12}$，而此與我們模擬的結果一致。

表 9 (Burr type XII 分配) 當(n,r,m,l,s)=(24,3,5,2,1)且 α =0.1 之信賴區間上下界及信賴區間區間長度

樞紐量	信賴區間	區間長度
$\tilde{W}_1$	(0.9405 ， 1.8628)	0.9223
$\tilde{W}_2$	(0.9375 ， 1.8341)	0.8966
$\tilde{W}_3$	(0.9465 ， 1.8639)	0.9174
$\tilde{W}_4$	(0.9325 ， 1.8673)	0.9348
$\tilde{W}_5$	(0.9505 ， 1.9240)	0.9735
$\tilde{W}_6$	(0.9345 ， 1.8281)	0.8936*
$\tilde{W}_7$	(0.9430 ， 1.8553)	0.9123
$\tilde{W}_8$	(0.9330 ， 1.8538)	0.9208
$\tilde{W}_9$	(0.9520 ， 1.9055)	0.9535
$\tilde{W}_{10}$	(0.9385 ， 1.8416)	0.9031
$\tilde{W}_{11}$	(0.9390 ， 1.8791)	0.9401
$\tilde{W}_{12}$	(0.9355 ， 1.8353)	0.8998
$\tilde{W}_{13}$	(0.8782 ， 1.8688)	0.9906
$\tilde{W}_{14}$	(0.8840 ， 1.8687)	0.9847
$\tilde{W}_{15}$	(0.8769 ， 1.8617)	0.9848
$\tilde{W}_{16}$	(0.8751 ， 1.8742)	0.9991
$\tilde{W}_{17}$	(0.8669 ， 1.8660)	0.9991
$\tilde{W}_{18}$	(0.8867 ， 1.8641)	0.9774

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

表 10 (Burr type XII 分配) 當(n,r,m,l,s)= (24,2,5,3,1)且 α =0.1 之信賴區間上下界及信賴區間區間長度

樞紐量	信賴區間	區間長度
$\tilde{W}_1$	(0.9650 ， 1.8605)	0.8955
$\tilde{W}_2$	(0.9575 ， 1.8326)	0.8751
$\tilde{W}_3$	(0.9833 ， 1.9060)	0.9227
$\tilde{W}_4$	(0.9411 ， 1.8243)	0.8832
$\tilde{W}_5$	(0.9790 ， 1.9260)	0.9470
$\tilde{W}_6$	(0.9555 ， 1.8288)	0.8733*
$\tilde{W}_7$	(0.9808 ， 1.8985)	0.9177
$\tilde{W}_8$	(0.9405 ， 1.8151)	0.8746
$\tilde{W}_9$	(0.9795 ， 1.9100)	0.9305
$\tilde{W}_{10}$	(0.9720 ， 1.8753)	0.9033
$\tilde{W}_{11}$	(0.9645 ， 1.8723)	0.9078
$\tilde{W}_{12}$	(0.9700 ， 1.8714)	0.9014
$\tilde{W}_{13}$	(0.9267 ， 1.9902)	1.0635
$\tilde{W}_{14}$	(0.9331 ， 1.9930)	1.0599
$\tilde{W}_{15}$	(0.9209 ， 1.9832)	1.0623
$\tilde{W}_{16}$	(0.9259 ， 2.0014)	1.0755
$\tilde{W}_{17}$	(0.9121 ， 1.9897)	1.0776
$\tilde{W}_{18}$	(0.9337 ， 1.9835)	1.0498

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

表 11 (Burr type XII 分配) 當(n,r,m,l,s)= (24,1,5,3,2)且 α =0.1 之信賴區間上下界及信賴區間區間長度

樞紐量	信賴區間	區間長度
$\tilde{W}_1$	(0.9431 ， 1.8203)	0.8772
$\tilde{W}_2$	(0.9335 ， 1.7851)	0.8516
$\tilde{W}_3$	(0.9570 ， 1.8590)	0.9020
$\tilde{W}_4$	(0.9500 ， 1.8210)	0.8710
$\tilde{W}_5$	(0.9875 ， 1.9231)	0.9356
$\tilde{W}_6$	(0.9116 ， 1.7598)	0.8482*
$\tilde{W}_7$	(0.9300 ， 1.8226)	0.8926
$\tilde{W}_8$	(0.9293 ， 1.7913)	0.8620
$\tilde{W}_9$	(0.9630 ， 1.8780)	0.9150
$\tilde{W}_{10}$	(0.9375 ， 1.8084)	0.8709
$\tilde{W}_{11}$	(0.9648 ， 1.8543)	0.8895
$\tilde{W}_{12}$	(0.9146 ， 1.7817)	0.8671
$\tilde{W}_{13}$	(0.7572 ， 1.7414)	0.9842
$\tilde{W}_{14}$	(0.7717 ， 1.7488)	0.9771
$\tilde{W}_{15}$	(0.7624 ， 1.7381)	0.9757
$\tilde{W}_{16}$	(0.7496 ， 1.7472)	0.9976
$\tilde{W}_{17}$	(0.7392 ， 1.7336)	0.9944
$\tilde{W}_{18}$	(0.7780 ， 1.7444)	0.9664

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

表 12 (Burr type XII 分配) 當(n,r,m,l,s)= (24,4,5,1,1)且 α =0.1 之信賴區間上下界及信賴區間區間長度

樞紐量	信賴區間	區間長度
$\tilde{W}_1$	(0.9380 ， 1.9340)	0.9960
$\tilde{W}_2$	(0.9325 ， 1.8800)	0.9475
$\tilde{W}_3$	(0.9310 ， 1.8778)	0.9468
$\tilde{W}_4$	(0.9425 ， 1.9800)	1.0375
$\tilde{W}_5$	(0.9410 ， 1.9805)	1.0395
$\tilde{W}_6$	(0.9295 ， 1.8718)	0.9423
$\tilde{W}_7$	(0.9280 ， 1.8685)	0.9405
$\tilde{W}_8$	(0.9460 ， 1.9615)	1.0155
$\tilde{W}_9$	(0.9445 ， 1.9600)	1.0155
$\tilde{W}_{10}$	(0.9270 ， 1.8655)	0.9385
$\tilde{W}_{11}$	(0.9345 ， 1.9540)	1.0195
$\tilde{W}_{12}$	(0.9240 ， 1.8578)	0.9338*
$\tilde{W}_{13}$	(0.8563 ， 1.8396)	0.9833
$\tilde{W}_{14}$	(0.8617 ， 1.8353)	0.9736
$\tilde{W}_{15}$	(0.8609 ， 1.8344)	0.9735
$\tilde{W}_{16}$	(0.8511 ， 1.8383)	0.9872
$\tilde{W}_{17}$	(0.8502 ， 1.8372)	0.9870
$\tilde{W}_{18}$	(0.8662 ， 1.8364)	0.9702

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

表 13 (Burr type XII 分配) 當(n,r,m,l,s)= (24,1,5,1,4)且 α =0.1 之信賴區間上下界及信賴區間區間長度

樞紐量	信賴區間	區間長度
$\tilde{W}_1$	(0.8910 ， 1.7803)	0.8893
$\tilde{W}_2$	(0.8930 ， 1.7609)	0.8679*
$\tilde{W}_3$	(0.8946 ， 1.7650)	0.8704
$\tilde{W}_4$	(0.9111 ， 1.7961)	0.8850
$\tilde{W}_5$	(0.9141 ， 1.8026)	0.8885
$\tilde{W}_6$	(0.8646 ， 1.7408)	0.8762
$\tilde{W}_7$	(0.8660 ， 1.7448)	0.8788
$\tilde{W}_8$	(0.8866 ， 1.7700)	0.8834
$\tilde{W}_9$	(0.8900 ， 1.7750)	0.8850
$\tilde{W}_{10}$	(0.8943 ， 1.7691)	0.8748
$\tilde{W}_{11}$	(0.9160 ， 1.8076)	0.8916
$\tilde{W}_{12}$	(0.8652 ， 1.7491)	0.8839
$\tilde{W}_{13}$	(0.7141 ， 1.7389)	1.0248
$\tilde{W}_{14}$	(0.7443 ， 1.7363)	0.9920
$\tilde{W}_{15}$	(0.7441 ， 1.7367)	0.9926
$\tilde{W}_{16}$	(0.7113 ， 1.7416)	1.0303
$\tilde{W}_{17}$	(0.7112 ， 1.7421)	1.0309
$\tilde{W}_{18}$	(0.7463 ， 1.7348)	0.9885

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

表 14 (Burr type XII 分配) 當(n,r,m,l,s)= (24,0,0,0,6)且 α =0.1 之信賴區間上下界及信賴區間區間長度

樞紐量	信賴區間	區間長度
$\tilde{W}_1$	(0.9140 ， 1.8643)	0.9503
$\tilde{W}_2$	(0.9253 ， 1.8369)	0.9116*
$\tilde{W}_3$	(0.9253 ， 1.8369)	0.9116*
$\tilde{W}_4$	(0.9253 ， 1.8369)	0.9116*
$\tilde{W}_5$	(0.9253 ， 1.8369)	0.9116*
$\tilde{W}_6$	(0.9140 ， 1.8643)	0.9503
$\tilde{W}_7$	(0.9140 ， 1.8643)	0.9503
$\tilde{W}_8$	(0.9140 ， 1.8643)	0.9503
$\tilde{W}_9$	(0.9140 ， 1.8643)	0.9503
$\tilde{W}_{10}$	(0.9253 ， 1.8369)	0.9116*
$\tilde{W}_{11}$	(0.9253 ， 1.8369)	0.9116*
$\tilde{W}_{12}$	(0.9140 ， 1.8643)	0.9503
$\tilde{W}_{13}$	(0.8862 ， 2.5535)	1.6673
$\tilde{W}_{14}$	(0.9090 ， 2.4834)	1.5744
$\tilde{W}_{15}$	(0.9090 ， 2.4834)	1.5744
$\tilde{W}_{16}$	(0.8862 ， 2.5535)	1.6673
$\tilde{W}_{17}$	(0.8862 ， 2.5535)	1.6673
$\tilde{W}_{18}$	(0.9090 ， 2.4834)	1.5744

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

表 15 (Burr type XII 分配) 當(n,r,m,l,s)= (24,6,3,0,0)且 α =0.1 之信賴區間上下界及信賴區間區間長度

樞紐量	信賴區間	區間長度
$\tilde{W}_1$	(0.8552 ， 2.0750)	1.2198
$\tilde{W}_2$	(0.8390 ， 1.8176)	0.9786
$\tilde{W}_3$	(0.8390 ， 1.8176)	0.9786
$\tilde{W}_4$	(0.8552 ， 2.0750)	1.2198
$\tilde{W}_5$	(0.8552 ， 2.0750)	1.2198
$\tilde{W}_6$	(0.8390 ， 1.8176)	0.9786
$\tilde{W}_7$	(0.8390 ， 1.8176)	0.9786
$\tilde{W}_8$	(0.8552 ， 2.0750)	1.2198
$\tilde{W}_9$	(0.8552 ， 2.0750)	1.2198
$\tilde{W}_{10}$	(0.8390 ， 1.8176)	0.9786
$\tilde{W}_{11}$	(0.8552 ， 2.0750)	1.2198
$\tilde{W}_{12}$	(0.8390 ， 1.8176)	0.9786
$\tilde{W}_{13}$	(0.7747 ， 1.7021)	0.9274*
$\tilde{W}_{14}$	(0.7747 ， 1.7021)	0.9274*
$\tilde{W}_{15}$	(0.7747 ， 1.7021)	0.9274*
$\tilde{W}_{16}$	(0.7747 ， 1.7021)	0.9274*
$\tilde{W}_{17}$	(0.7747 ， 1.7021)	0.9274*
$\tilde{W}_{18}$	(0.7747 ， 1.7021)	0.9274*

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

表 16 (Burr type XII 分配) 當(n,r,m,l,s)= (24,3,3,0,3)且 α =0.1 之信賴區間上下界及信賴區間區間長度

樞紐量	信賴區間	區間長度
$\tilde{W}_1$	(0.9140 ， 1.8785)	0.9645
$\tilde{W}_2$	(0.9375 ， 1.8890)	0.9515
$\tilde{W}_3$	(0.9375 ， 1.8890)	0.9515
$\tilde{W}_4$	(0.9480 ， 1.9508)	1.0028
$\tilde{W}_5$	(0.9480 ， 1.9508)	1.0028
$\tilde{W}_6$	(0.9020 ， 1.8435)	0.9415*
$\tilde{W}_7$	(0.9020 ， 1.8435)	0.9415*
$\tilde{W}_8$	(0.9140 ， 1.8785)	0.9645
$\tilde{W}_9$	(0.9140 ， 1.8785)	0.9645
$\tilde{W}_{10}$	(0.9375 ， 1.8890)	0.9515
$\tilde{W}_{11}$	(0.9480 ， 1.9508)	1.0028
$\tilde{W}_{12}$	(0.9020 ， 1.8435)	0.9415*
$\tilde{W}_{13}$	(0.8267 ， 1.8702)	1.0435
$\tilde{W}_{14}$	(0.8625 ， 1.8784)	1.0159
$\tilde{W}_{15}$	(0.8625 ， 1.8784)	1.0159
$\tilde{W}_{16}$	(0.8267 ， 1.8702)	1.0435
$\tilde{W}_{17}$	(0.8267 ， 1.8702)	1.0435
$\tilde{W}_{18}$	(0.8625 ， 1.8784)	1.0159

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

表 17 (Burr type XII 分配) 當(n,r,m,l,s)= (24,0,3,6,0)且 α =0.1 之信賴區間上下界及信賴區間區間長度

樞紐量	信賴區間	區間長度
$\tilde{W}_1$	(0.9695 ， 1.9175)	0.9480
$\tilde{W}_2$	(0.9688 ， 1.8952)	0.9264*
$\tilde{W}_3$	(1.0138 ， 2.0273)	1.0135
$\tilde{W}_4$	(0.9688 ， 1.8952)	0.9264*
$\tilde{W}_5$	(1.0138 ， 2.0273)	1.0135
$\tilde{W}_6$	(0.9688 ， 1.8952)	0.9264*
$\tilde{W}_7$	(1.0138 ， 2.0273)	1.0135
$\tilde{W}_8$	(0.9688 ， 1.8952)	0.9264*
$\tilde{W}_9$	(1.0138 ， 2.0273)	1.0135
$\tilde{W}_{10}$	(0.9695 ， 1.9175)	0.9480
$\tilde{W}_{11}$	(0.9695 ， 1.9175)	0.9480
$\tilde{W}_{12}$	(0.9695 ， 1.9175)	0.9480
$\tilde{W}_{13}$	(0.9479 ， 2.4143)	1.4664
$\tilde{W}_{14}$	(0.9435 ， 2.4220)	1.4785
$\tilde{W}_{15}$	(0.9265 ， 2.4215)	1.4950
$\tilde{W}_{16}$	(0.9435 ， 2.4220)	1.4785
$\tilde{W}_{17}$	(0.9265 ， 2.4215)	1.4950
$\tilde{W}_{18}$	(0.9479 ， 2.4143)	1.4664

註：表中”* ”代表信賴區間的區間長度最短

由表 10 至 17 可以發現，區間長度最短的樞紐量可能與模擬的結果有些設限下並不一致，這是因為此數值實例僅用一組資料來求得其區間長度，而模擬的結果為 20000 次區間長度的平均區間長度。但我們可以發現，其最短區間長度都發生在檢定力較佳的樞紐量上。

三、結果與討論

在前述的章節中，我們針對 Burr type XII 分配在多重型 II 設限樣本下對形狀參數做統計推論。而從模擬結果與數值實例中，可以發現所得到的結果會因為設限樣本的不同而使檢定力表現較佳的樞紐量也有所不同，但我們可以歸納出平均區間長度最短的樞紐量，大致上都會發生在具有檢定力表現較佳的樞紐量上或其前後一個樞紐量上，例如:在 Burr type XII 分配上，當 c=0.8,1.4、n=12 且多重(r,m,l,s)=(3,5,2,1)設限時，由模擬的資料可知其平均區間長度為最短的樞紐量為$\tilde{W}_{16}$，而其檢定力表現較佳的樞紐量為$\tilde{W}_6$、$\tilde{W}_{12}$、$\tilde{W}_{17}$及$\tilde{W}_{18}$，由此可發現平均區間長度為最短的樞紐量$\tilde{W}_{16}$，剛好發生在檢定力表現較佳的樞紐量$\tilde{W}_{17}$之前一個樞紐量上；在 Burr type XII 分配上，當 c=0.8,1.4、n=24 且多重(r,m,l,s)=(3,5,2,1)設限時，由模擬的資料可知其平均區間長度為最短的樞紐量為$\tilde{W}_6$，而其檢定力表現較佳的樞紐量為$\tilde{W}_6$、$\tilde{W}_7$、$\tilde{W}_{10}$及$\tilde{W}_{12}$，由此可發現平均區間長度為最短的樞紐量$\tilde{W}_6$，剛好發生在檢定力表現較佳的樞紐量$\tilde{W}_6$上，且其他設限也可以得到相同的結果。

四、計劃成果自評

因此在現實生活中，當我們遇到如本文所取多重型 II 設限樣本的情形時，將可針對不同的設限方式利用我們得到檢定力表現較佳的樞紐量及這些樞紐量之前後一個樞紐量做比較，則我們可以找到一個最佳的樞紐量。

五、參考文獻

英文部分

[1] Ali Mousa, M. A. M. and Jaheen, Z. F. (2002a),”Bayesian prediction for progressively censored data form the Burr model”, *Statistical Papers*, **43**, 578-593.

[2] Ali Mousa, M. A. M. and Jaheen, Z. F.

(2002b),Statistical Inference for the Burr Model Based on progressively Censored Data, *Computers amd Mathematics with Applications*, **43**, 1441-1449.

[3] Balakrishnan, N. (1990), On the maximum likelihood estimation of the location and scale parameters of exponential distribution based on multiply Type II censored samples, *Journal of Applied Statistics*, **17**, 55-61.

[4] Balasubramanian, K. and Balakrishnan, N. (1992), Estimation for one- and two-parameter exponential distributions under multiple type II censoring, *Statistical Papers*, **33**, 203-216.

[5] Burr, I. W. (1942), Cumulative frequency functions, *Ann. Math. Statist.*,13, 215-232.

[6] Compaq Visual Fortran, Professional Edition V6.0 Intel Version and IMSL (2000), Compaq Computer Corporation.

[7] Fernández, A. J. (2000), On maximum likelihood prediction based on type II doubly censored exponential data, *Metrika*, **50**, 211-220.

[8] Jiang R., Ji P., Xiao X. (2003), "Aging Property of Unimodal Failure Rate Models", *Reliability Engineering and System Safety*, **79**, 113-116.

[9] Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1994), *Continuous Univariate Distributions-Volume 1*, John Wiley & Sons, Inc, New York, Second Edition.

[10] Johnson, R. A. and Bhattacharyya, G. K. (2001), *Statistics: principles and methods*, 4th Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York.

[11] Leemis, L. and Shih, L. H. (1989), Exponential parameter estimation for data sets containing left and right censored observations, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*,**18**, 1077-1085

[12] Lin, C. T. and Balakrishnan, N. (2001), Exact linear inference for scaled exponential distributions based on doubly Type-II censored samples, *Journal of Statist. Comput. Stimul.*, **71**, 183-199.

[13] Lin, C. T. and Balakrishnan, N. (2003), Exact prediction intervals for exponential distributions based on doubly Type-II censored samples, *Journal of Applied Statistics*, **30(7)**, 783-801.

[14] Upadhyay, S. K., Shastri, V. and Singh, U. (1992), Bayes estimators of exponential parameters when observations are left and right censored. *Metron*, **L-n 3-4**,.185-199

[15] Upadhyay, S. K., Singh, U. and Shastri, V. (1996), Estimation of exponential parameters under multiply type II censoring, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **25(3)**,801-815.

[16] Wu, J. W. and Yang C. C. (2002), Weighted Moments Estimation of The Scale Parameter of The Exponential Distribution Based on a Multiply Type II Censored Sample, *Quality and Reliability Engineering International*, **18**,149-154.

[17] Wu, J. W. and Yu, H. Y.(2005), Statistical inference about the shape parameter of the Burr type XII distribution under the failure-censored sampling plan, *Applied Mathematics and Computation*,**163**,443-482

中文部分

[1] 林雅莉，利用多重型 II 設限樣本對 Burr Type XII 及 Lognormal 分配的形狀參數做統計推論，台北；淡江大學統計系應用統計學碩士班碩士論文，94 年。